14-03-2018

1) A) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+1/k}}$, $a_k = \frac{1}{k^{1+1/k}}$

$b_k = \frac{1}{k}$ $\quad \frac{a_k}{b_k} = \frac{1}{1}$ $(0, +\infty)$ $\quad \frac{a_k}{b_k} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \to \frac{1}{1} = 1 \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow \sum_k a_k \sim \sum_k b_k \qquad \sum_k a_k = +\infty$

B) $\sum_{k}^{\infty} (1 - e^{-1/k})$ $\qquad e^{-1/k} = \sqrt[k]{\frac{1}{e}} \leq \sqrt[k]{1} = 1 \Rightarrow 1 - e^{-1/k} \geq 0$

$a_k \to 0$
$b_k = \frac{1}{k}$ $\qquad \frac{1}{k} = x \to 0^+ \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - e^{-x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} e^{-x} = 1$

$\frac{a_k}{b_k} = \frac{1 - e^{-1/k}}{1/k} \to 1 \in (0, +\infty)$

Γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$ $\qquad \lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} \frac{1/k}{\ln(1 + 1/k)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln(1+x)}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{(1+x)^{-1}} = 1 \neq 0 \Rightarrow a_k \not\to 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}_{a_k} \quad , b_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow b_k = \frac{1}{k}$$

για να έχουμε $\frac{\sin(x)}{x}$

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{k}}} \xrightarrow{k\to\infty} 1 = 1 \in (0, +\infty)$$

$$1 = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

E) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}} = \sum a_k \sim \sum 2^k a_{2^k}$

$a_k \searrow 0$

$a_k > 0$

$$b_k = 2^k \frac{1}{(\ln 2^k)^{\ln 2^k}} = \frac{2^k}{(k\ln 2)^{k \ln 2}} = \left[\frac{2}{(k\ln 2)^{\ln 2}}\right]^k = b_k > 0$$

$$\sqrt[k]{b_k} = \frac{2}{(k\ln 2)^{\ln 2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0 < 1 \quad \overset{\text{κρ.}}{\underset{\text{ρίζας}}{\Rightarrow}} \sum b_k \text{ συγκλ.} \Rightarrow \sum a_k \text{ συγκλ.}$$

2) $\left.\begin{array}{l} a_k, b_k > 0, \forall k \\ \sum a_k, \sum b_k \text{ συγκλ.} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_k b_k$ συγκλίνει

$a_k \to 0 \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}$

$a_k \leq 1, (\forall k \geq k_0)$

$\left.\begin{array}{l} 0 < a_k b_k \leq 1 \cdot b_k \ (\forall k \geq k_0) \\ \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k \text{ συγκλ.} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\sum_{k=k_0} a_k b_k$ συγκ. $\Rightarrow \sum_k a_k b_k$ συγκ.

3) $a_k > 0$, $a_k \to 0$

$\Rightarrow \sum a_k^k$ συγκ. ($a_k^k \to b_k$)

$\sqrt[k]{|b_k|} = a_k \to 0 < 1$

$\Rightarrow \sum b_k$ συγκλίνει.

4) $a_k > 0$, $a_k \searrow 0$

$\Rightarrow \exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ υπακολ. $\sum a_{n_k}$ συγκλίνει

$a_{n_k} \leq b_k = \frac{1}{k^2}$, $\forall k$

$n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$

Διαλέγουμε το n_1 $\boxed{a_{n_1} \leq 1}$ ($\exists k_0$ $|a_k| \leq 1$, ($\forall k \geq k_0$) Διαλ. $n_1 \geq k_0$)

Συνεχ. επαγωγικά. Έστω ότι έχουν κατασκ. $n_1 < n_2 < \dots < n_k$

$a_{n_i} \leq \frac{1}{i^2}$, $\forall i = 1, 2, 3 \dots k$

Θα βρούμε $n_{k+1} > n_k$. $a_{k+1} \leq \frac{1}{(k+1)^2}$

Για $\varepsilon = 1/(k+1)^2$, εφαρμ. $a_k \to 0 \Rightarrow \exists k_0$ $a_\lambda < \frac{1}{(k+1)^2}$, $\forall \lambda \geq k_0$

Διαλέγ $n_{k+1} \geq k_0'$, $n_{k+1} > n_k \Rightarrow a_{n_{k+1}} < \frac{1}{(k+1)^2}$

ζ) $a_k > 0$

$\sum a_k$ συγκλίνει

$n_1 < \dots < n_k < n_{k+1}$

$(a_{n_k})_k \Rightarrow \sum_k a_{n_k}$

Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα της νέας σειράς

$$t_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_{n_k} = a_{n_1} + a_{n_2} + \dots + a_{n_\nu} \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{n_\nu} = \sum_{k=1}^{n_\nu} a_k$$

Το μερικό αθρ της αρχ σειράς $S_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$

$$\sum_{k=1}^{n_\nu} a_k = S_{n_\nu} \leq M > 0$$

Διαλέγ $n_{k+1} \geq k_0$, $n_{k+1} > n_k \Rightarrow a_{n_{k+1}} < \frac{1}{(k+1)^2}$

θ) $\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \\ &\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \end{aligned}\right\}$ συγκλ

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλ.

$$t_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_{2k} = a_2 + a_4 + \dots + a_{2\nu}$$

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + \dots + a_{2\nu-1}$$

$$U_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$$

$$t_\nu + S_n = U_{2n}$$

$\downarrow$ $\searrow$

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k}, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k-1}$$

$$U_{2\nu-1} = S_\nu + t_{\nu-1}$$

$\downarrow$

$S + t$

$U_{2\nu} \to S+t \leftarrow U_{2\nu-1}$

$\Rightarrow (U_m)_m$ συγκλ.

$U_m \to S+t$

$\Downarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλ.

Αντίστροφο: Διαλέγουμε $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \to +\infty$

$\downarrow$

a_k $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k-1} = -\sum \frac{1}{2k-1} = -\infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sim \sum \frac{1}{k} \to \frac{1}{2}$$

7) $\left.\begin{array}{l}\sum a_k \text{ συγκλίνει} \\ b_k \searrow b\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_k a_k b_k$ συγκλίνει $\quad a_k \geq 0, \ |b_k| \leq M$

$|a_k b_k| \leq M |a_k|$

$b_n \geq b$ $\qquad$ $c_n = b_n - b \geq 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b)$ <u>συγκ</u>

$\sum_{n=1}^{n} a_n (b_n - b) \to \ell$

$\sum_{n=1}^{n} a_n b_n - b \sum^{n} a_n \Rightarrow \sum a_n b_n$